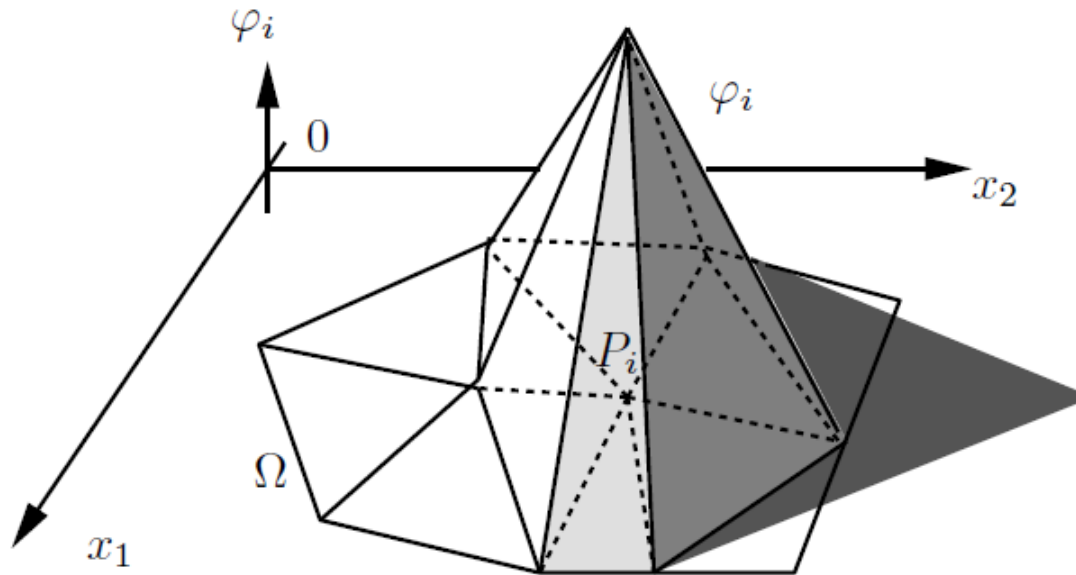


# Cours 4:

problème elliptique et éléments finis 2D



## Problème elliptique et éléments finis 2D

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal dans le plan  $O_{x_1x_2}$  de frontière  $\partial\Omega$  et soit  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Soit  $x$  un point de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans le domaine  $\Omega$ . Dans la suite nous notons indifféremment  $x$  ou  $(x_1, x_2)$ . Soit  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  quatre fonctions de  $x$  données (ici encore nous notons indifféremment  $a_{ij}(x)$  ou  $a_{ij}(x_1, x_2)$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ ) que nous supposons continues et une fois continûment dérivables par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ . Soit encore  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue donnée. Nous posons le problème de trouver une fonction  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les relations :

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}\vec{\nabla}u) = f(x)$$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (11.1)$$

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (11.2)$$

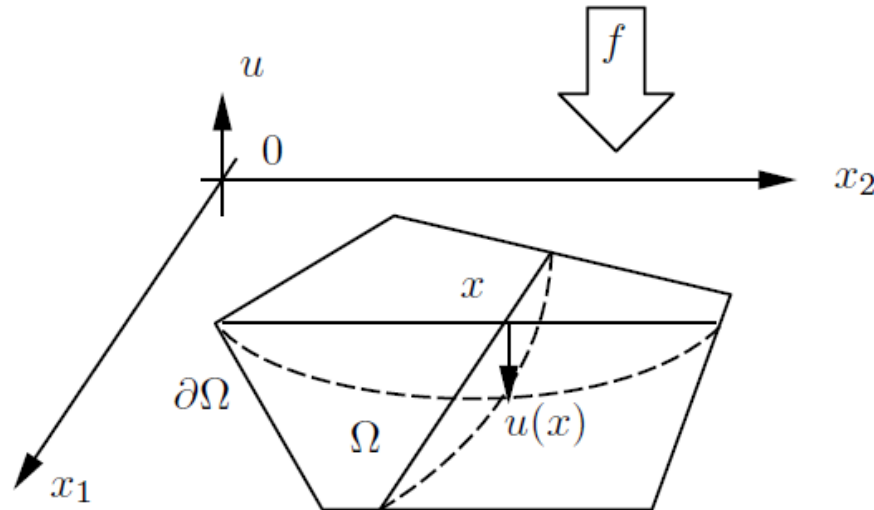
où la notation  $\partial/\partial x_i$  désigne l'opération de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ . Nous dirons que le problème (11.1) (11.2) est un problème différentiel aux limites d'ordre 2, la condition limite étant l'équation (11.2).

# Problème elliptique et éléments finis 2D

$$-\operatorname{div}(A\overrightarrow{\nabla}u) = f(x)$$

Si  $A(x_1, x_2)$  est symétrique définie positive (i.e. symétrique et à valeurs propres positives), le pb est dit fortement elliptique.

Les problèmes elliptiques interviennent lors de la modélisation de problèmes physiques tels que les problèmes de potentiel, de déformation de membranes, d'écoulements de fluides. Dans la suite de ce chapitre nous décrivons la méthode des éléments finis, qui est souvent utilisée pour résoudre numériquement ce type de problèmes.



autre application:

thermique stationnaire avec

source volumique

$$-\operatorname{div}([k]\overrightarrow{\nabla}T) = q(x)$$

## Problème elliptique et éléments finis 2D

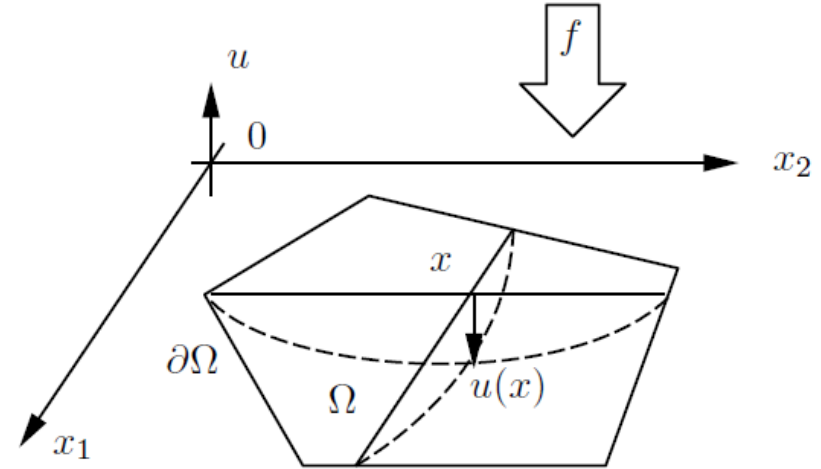
Mentionnons qu'un exemple typique de problème fortement elliptique est donné par  $a_{11} = a_{22} = 1$  et  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Dans la suite, nous nous restreignons à ce cas et nous cherchons donc une fonction  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (11.3)$$

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (11.4)$$

où  $\Delta u$  est le laplacien de  $u$ , i.e.  $\Delta u = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2$ . Le problème (11.3) (11.4) est appelé *problème de Poisson*.

si  $A = \text{Id}$ ,  $-\text{div}(A \overrightarrow{\nabla} u) = -\Delta u(x) = f(x)$



La solution  $u$  du problème de Poisson modélise le déplacement vertical  $u(x)$  au point  $x$  d'une membrane  $\Omega$  tendue, attachée à  $\partial\Omega$ , et soumise à une densité de force verticale et proportionnelle à  $f$  (fig. 11.1).

## Problème elliptique et éléments finis 2D

Problème de Poisson:  $-\Delta u = f(x)$

Comme nous l'avons déjà fait dans la section 10.3, nous pouvons multiplier la première équation de (11.3) par une fonction  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière et intégrer sur  $\Omega$ . Nous obtenons

$$-\iint_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad (11.5)$$

où  $x = (x_1, x_2)$  et  $dx = dx_1 dx_2$ . En utilisant la formule :

$$\operatorname{div}(v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} v \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} u + v \Delta u, \quad (11.6)$$

nous obtenons à partir de (11.5) :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v(x) dx - \iint_{\Omega} \operatorname{div} \left( v(x) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x) \right) dx = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (11.7)$$

## Problème elliptique et éléments finis 2D

Problème de Poisson:  $-\Delta u = f(x)$

Le théorème de la divergence nous assure que :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \left( v(x) \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x) \right) dx = \int_{\partial\Omega} v(s) \frac{\partial u}{\partial n}(s) ds, \quad (11.8)$$

où  $\partial u / \partial n$  est la dérivée de  $u$  dans la direction normale extérieure à  $\partial\Omega$ . Si nous imposons que  $v$  s'annule sur  $\partial\Omega$ , nous pouvons déduire de (11.7) et (11.8) :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u(x) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} v(x) dx = \iint_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (11.9)$$

NB: si les C.L sont  $u(x) = 0$  sur  $\partial\Omega_0$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{a}$  sur  $\partial\Omega_a$  avec  $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_a$

alors on impose aux fonctions  $v$  de  $V$ :

$v(x) = 0$  sur  $\partial\Omega_0$  et  $v$  et  $u$  inconnues sur  $\partial\Omega_a$  avec  $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_a$

# Problème elliptique et éléments finis 2D

Problème de Poisson:  $-\Delta u = f(x)$

Soit  $V$  l'ensemble des fonctions  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $\Omega$ , nulles sur  $\delta\Omega$  et à dérivées partielles continues par morceaux.  $V$  est un espace vectoriel de dimension infinie.

La formulation faible ou variationnelle du pb revient à chercher  $u$  de  $V$  pour que pour tout  $v$  de  $V$ :

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}u(x)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}v(x)} d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) d\Omega$$

Soit  $V_h$  un sous espace vectoriel de dimension finie  $N$  et ayant pour base les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ . L'approximation de Galerkin consiste à résoudre le problème dans  $V_h$  i.e. à chercher  $u_h$  de  $V_h$  telle que:

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}u_h(x)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}v_h(x)} d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v_h(x) d\Omega$$

soit vérifiée pour tous les  $v_h$  de  $V_h$  donc pour tous les  $\varphi_j$  ( $j=1, 2 \dots N$ ).

En posant  $u_h(x) = u_1\varphi_1(x) + \dots + u_N\varphi_N(x)$ , il vient:

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} u_i = f_j \text{ avec } A_{ji} = A_{ij} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}\varphi_i(x)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\varphi_j(x)} d\Omega \text{ et } f_j = \int_{\Omega} f(x)\varphi_j(x) d\Omega$$

soit  $A\vec{u} = \vec{f}$  avec  $\vec{u}$  le  $N$  vecteur des  $u_i$

# Problème elliptique et éléments finis 2D

$$-\Delta u = f(x)$$

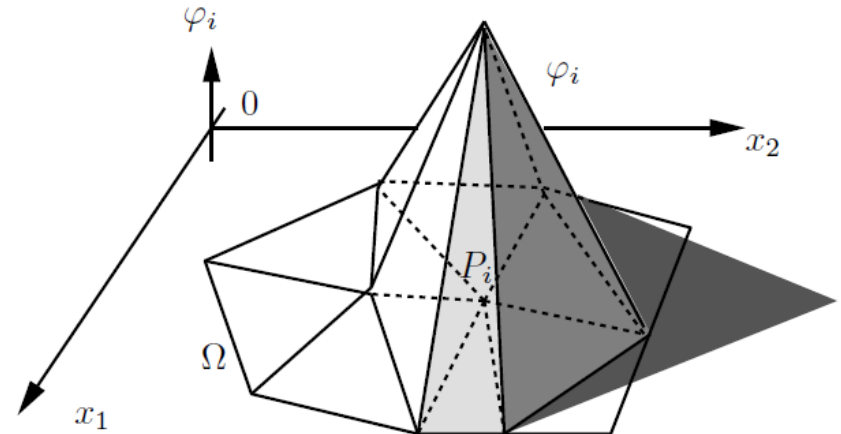
la matrice  $A$  est-elle régulière ?

Oui,  $A$  est symétrique définie positive.

Donc on pourra faire la décomposition de Cholesky  $A = LL^t$

Choix des fonctions  $\varphi_j(x)$  en 2D, les  
fonctions chapeau linaires par  
morceau ...

(élément triangulaire de degré 1)



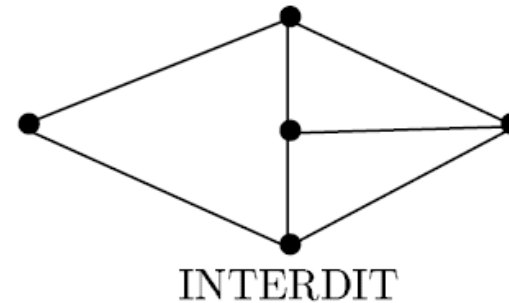
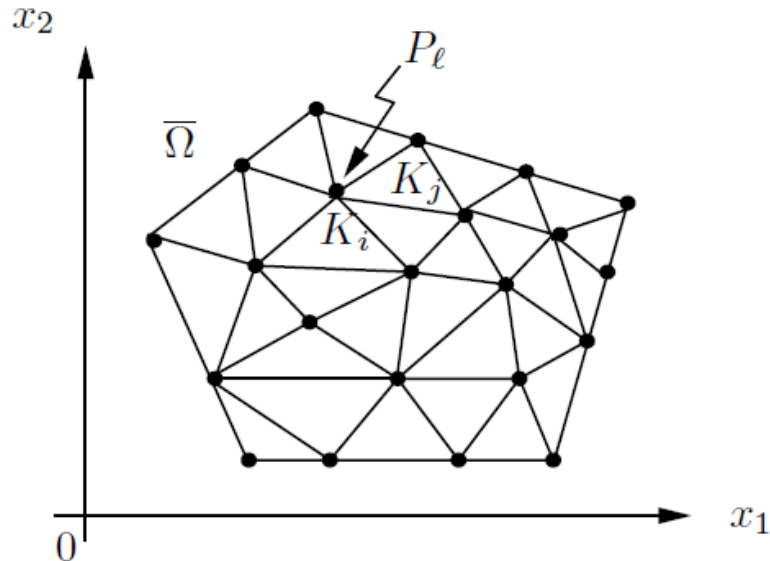
## Problème elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1: construction d'un maillage

Nous voulons construire des sous-espaces  $V_h$  de  $V$  de type *éléments finis triangulaires* (rappelons que  $\Omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ). Pour ce faire, nous construisons une *triangulation*  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{\Omega}$  en subdivisant  $\bar{\Omega}$  en triangles  $K_1, K_2, \dots, K_m$  ne se recouvrant pas et tels que

$$- \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_m,$$

- 2 triangles  $K_i$  et  $K_j$ ,  $i \neq j$ , possèdent ou bien un côté commun, ou bien un sommet  $P_\ell$  commun, ou bien sont disjoints (fig. 11.2).



## Problème elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1: finesse du maillage ( $h$ )

Nous introduisons encore un paramètre  $h$  mesurant le degré de finesse de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  :

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

où  $\text{diam}(K)$  est le diamètre de  $K$ , c'est-à-dire le maximum des distances euclidiennes entre deux points de  $K$ . Le sous-espace  $V_h$  de dimension finie de  $V$  est défini par

$$\begin{aligned} V_h = \{ & g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ est continue sur } \bar{\Omega}, \text{ s'annule sur } \partial\Omega, \\ & \text{la restriction de } g \text{ à tout triangle } K \\ & \text{de la triangulation est un polynôme de degré } \leq 1 \}. \end{aligned} \tag{11.14}$$

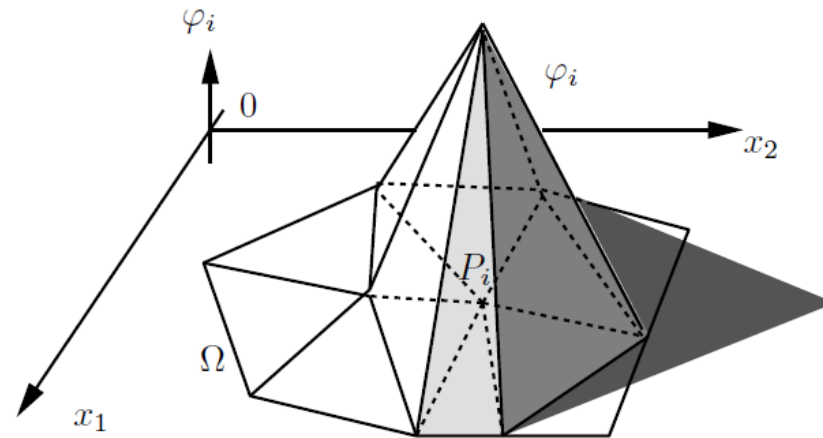
## Problème elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1: les fonctions chapeau

Soit  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  les sommets intérieurs de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ , encore appelés *nœuds* intérieurs. Pour décrire une fonction  $g \in V_h$ , nous pouvons choisir comme paramètres les valeurs  $g(P_i)$  de la fonction  $g$  aux nœuds  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ces valeurs  $g(P_i)$  sont appelées *degrés de liberté*. Les fonctions de base  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  de  $V_h$  sont alors définies par

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (11.15)$$

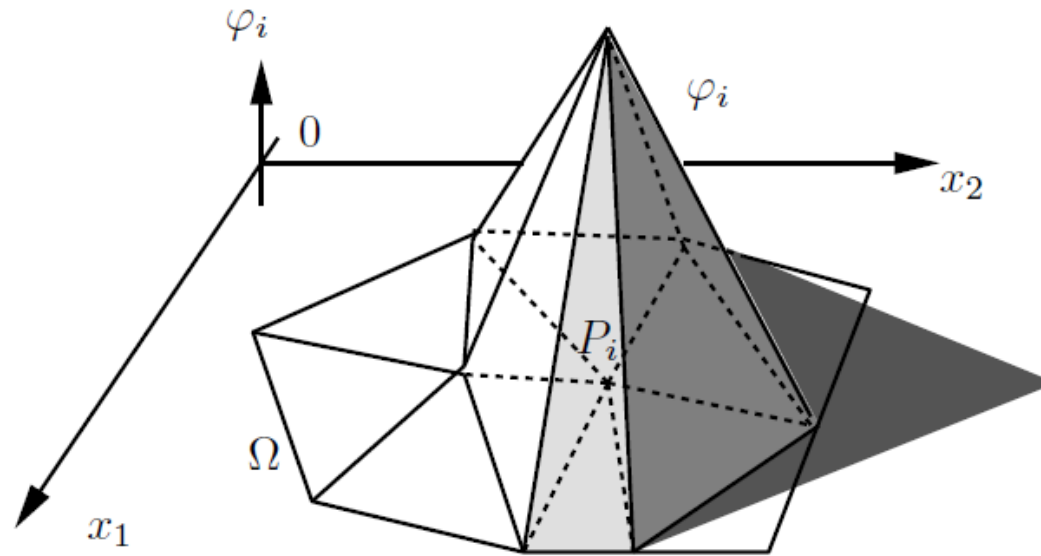
et sont nulles sur  $\partial\Omega$  (fig. 11.3). Le support de  $\varphi_i$  (adhérence de l'ensemble des points où  $\varphi_i$  n'est pas nul) est la réunion de tous les triangles qui ont pour sommet  $P_i$ .



## Problème elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1

Pour toute fonction  $g$  de  $V_h$ , nous avons  $g(x) = g_1\varphi_1(x) + \dots + g_N\varphi_N(x)$  avec  $g_i = g(P_i)$  pour  $i = 1$  à  $N$ . Il s'agit de l'interpolation linéaire de  $g(x)$  sur le domaine bidimensionnel  $\Omega$ .



# Problèmes elliptique et éléments finis 2D

## Résolution sur le carré unité.

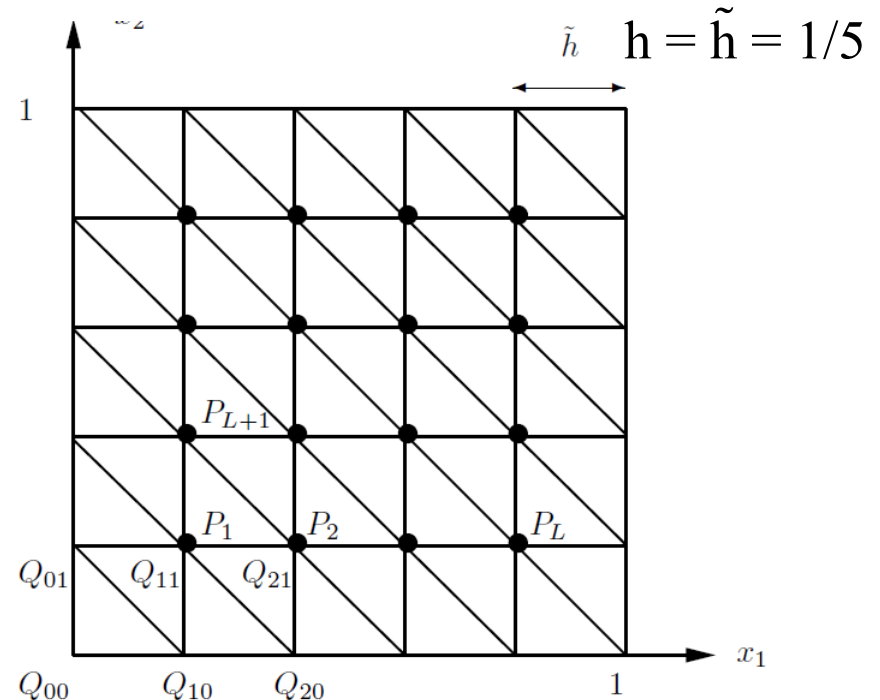
Soit  $\Omega$  le carré unité de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  et soit  $L$  un entier positif. Posons  $\tilde{h} = 1/(L + 1)$  et notons  $Q_{ij}$  les points de coordonnées  $x_1 = ih$  et  $x_2 = j\tilde{h}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, L + 1$ . Considérons la triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\overline{\Omega}$  ayant pour nœuds les points  $Q_{ij}$  (fig. 11.4). La triangulation  $\mathcal{T}_h$  contient  $N \equiv L^2$  nœuds intérieurs à  $\Omega$  que nous numérotions comme dans la figure 11.4 ligne par ligne, c'est-à-dire  $P_1 = Q_{11}, P_2 = Q_{21}, P_3 = Q_{31}, \dots, P_L = Q_{L1}, P_{L+1} = Q_{12}, P_{L+2} = Q_{22}, \dots, P_{2L} = Q_{L2}, P_{2L+1} = Q_{13}, \dots, P_N = Q_{LL}$ .

A droite, le carré unité avec ses 16 points intérieurs ( $L = 4, h = 1/5$ ).

On définit donc 16 fonctions de base linéaires  $\varphi_j(x)$  ( $N = 16$ ) centrées sur les 16 points  $P_1$  à  $P_{16}$ .

Calcul de la matrice  $A$  et du vecteur  $f$ :

$$A_{ji} = A_{ij} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_i(x) \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_j(x) d\Omega \quad \text{et} \quad f_j = \int_{\Omega} f(x) \varphi_j(x) d\Omega$$



## Problèmes elliptique et éléments finis 2D

Le support de  $\varphi_1$  est représenté dans la figure 11.5; il est constitué des 6 triangles  $K_1, K_2, \dots, K_6$ . Puisque  $\varphi_1$  est un polynôme de degré 1 sur chacun des triangles  $K_1, K_2, \dots, K_6$  et puisque  $\varphi_1(P_1) = 1$  et  $\varphi_1(Q_{ij}) = 0$  si  $(i, j) \neq (1, 1)$ , nous vérifions facilement que

$$h = \tilde{h} = 1/5$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{sur } K_1 && \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{sur } K_4, \\ \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} && \text{sur } K_2 && \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{sur } K_5, \\ \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} && \text{sur } K_3 && \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 &= \frac{1}{\tilde{h}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{sur } K_6. \end{aligned}$$

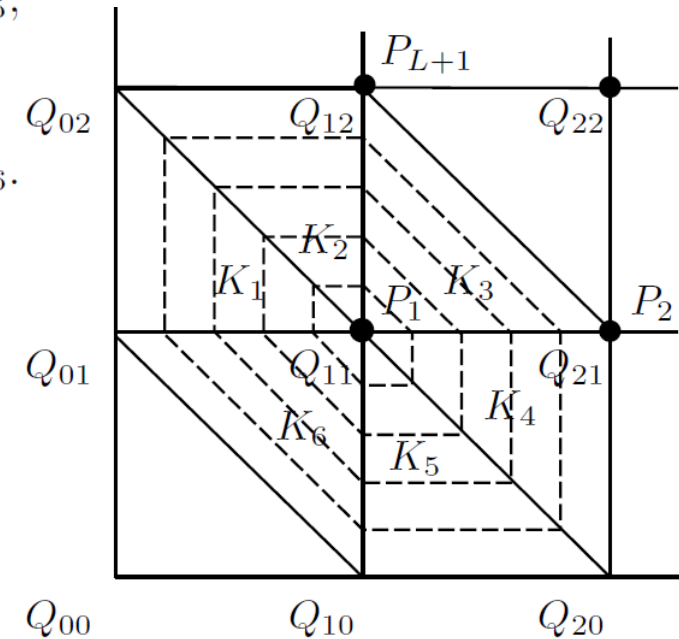
Support et isovaleurs de la fonction  $\varphi_1$  qui est une pyramide de hauteur 1 à base hexagonale.

Par exemple, sur  $K_6$ :  $\varphi_1(x) = x_1/h + x_2/h - 1$  car  $\varphi_1(h, h) = 1$

### Calcul de $A_{11}$ :

$$A_{11} = \int_{\Omega} \left| \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x) \right|^2 d\Omega = \sum_{k=1}^6 \int_{K_k} \left| \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x) \right|^2 d\Omega$$

On montre que  $A_{11} = 4$



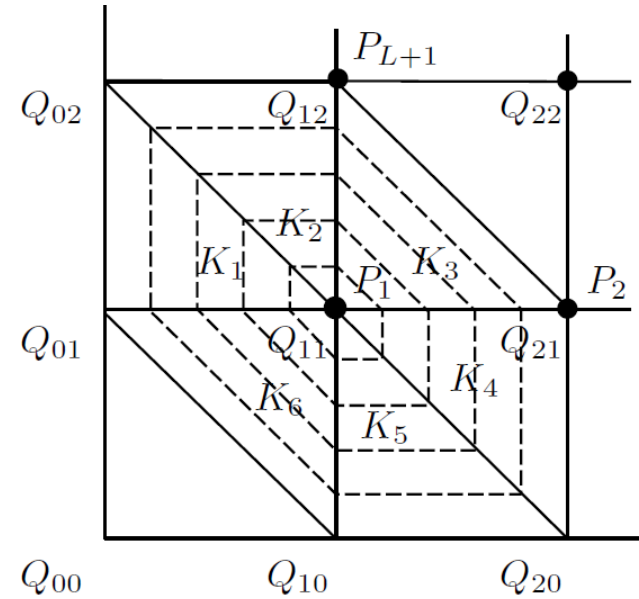
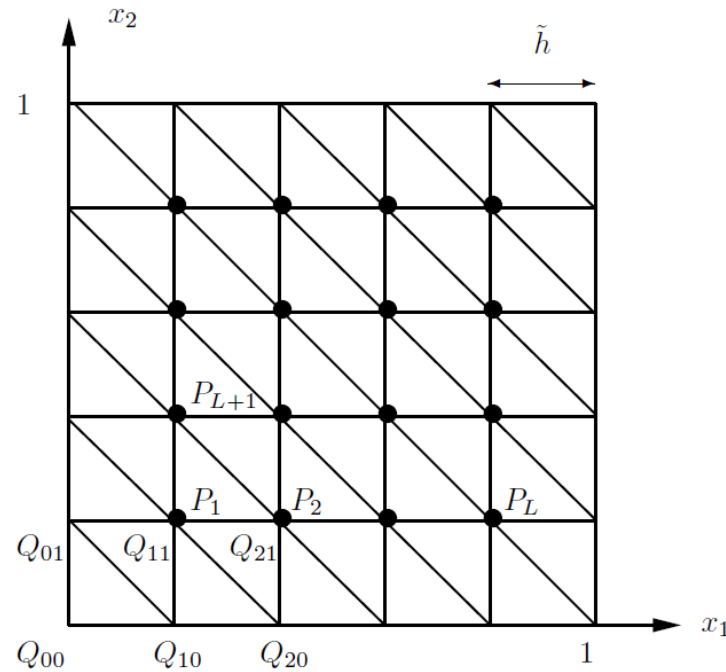
# Problèmes elliptique et éléments finis 2D

**Exo4a:** dans le cas  $L = 4$  ( $N = 16$ ), montrer que

$$A_{11} = A_{ii} = 4 \text{ pour } i = 1 \text{ à } N$$

$$A_{ii} = \int_{\Omega} \left| \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(\mathbf{x}) \right|^2 d\Omega$$

$$h = \tilde{h} = 1/5$$



# Problèmes elliptique et éléments finis 2D

**Exo4b:** dans le cas  $L = 4$  ( $N = 16$ ), montrer que

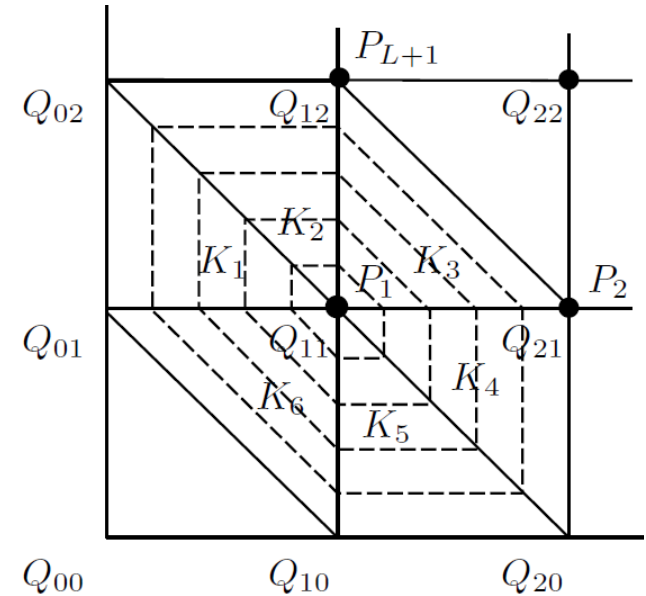
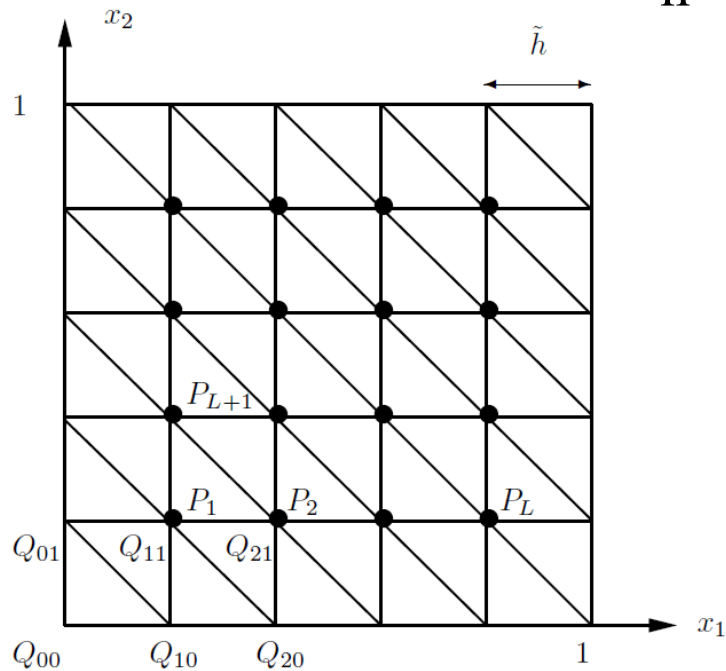
$$A_{12} = A_{21} = -1$$

$$A_{13} = A_{14} = 0$$

$$A_{15} = A_{51} = -1$$

$$A_{25} = A_{52} = 0$$

$$h = \tilde{h} = 1/5$$



## Problèmes elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1

Pour  $L = 4$  (16 points intérieurs) la matrice carrée 16x16  $A$  s'écrit:

$$A = \begin{bmatrix} B & C & & & \\ C & B & C & & \\ & C & B & C & \\ & & C & B & C \\ & & & C & B \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice carrée 16x16  $A$  est non diagonale: sa largeur de bande est 9 mais comme elle est symétrique, sa demi-largeur de bande est 5.

## Problèmes elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1

Approchons le second membre  $\vec{f}$  de (11.13) en utilisant la formule de quadrature

$$\iint_K g(x) dx \simeq \frac{g(S_1) + g(S_2) + g(S_3)}{3} \text{aire}(K) \quad (11.17)$$

pour tout triangle  $K$  de sommets  $S_1, S_2, S_3$  (nous pouvons remarquer que cette formule est exacte si  $g$  est un polynôme de degré 1, i.e. si  $g(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$ ).

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} f_1 &= \iint_{\Omega} f(x) \varphi_1(x) dx = \sum_{j=1}^6 \iint_{K_j} f(x) \varphi_1(x) dx \\ &\simeq \frac{1}{3} f(P_1) \cdot 6 \cdot \frac{\tilde{h}^2}{2} = f(P_1) \tilde{h}^2. \end{aligned}$$

De même, pour des raisons de symétrie (fig. 11.5), nous avons

$$f_j \simeq f(P_j) \tilde{h}^2 \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, N.$$

## Problèmes elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis triangulaires de degré 1

Il reste alors à résoudre le pb linéaire:  $A\vec{u} = \vec{f}$ ,

On montre alors que ce pb est identique à la méthode des différences finies **si le maillage est régulier et les fonctions de forme de degré 1:**

Notons  $u_{i,j} = u(i\tilde{h}, j\tilde{h})$ . Nous avons donc :

$$-\Delta u(P) \simeq \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\tilde{h}^2}. \quad (11.20)$$

Soit alors  $U_{i,j}$  une approximation par différences finies de  $u_{i,j} = u(i\tilde{h}, j\tilde{h})$  lorsque  $u$  vérifie  $-\Delta u = f$  dans  $\Omega$ ,  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Le schéma numérique pour calculer  $U_{i,j}$  s'écrit :

$$\frac{4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{\tilde{h}^2} = f(i\tilde{h}, j\tilde{h}), \quad (11.21)$$

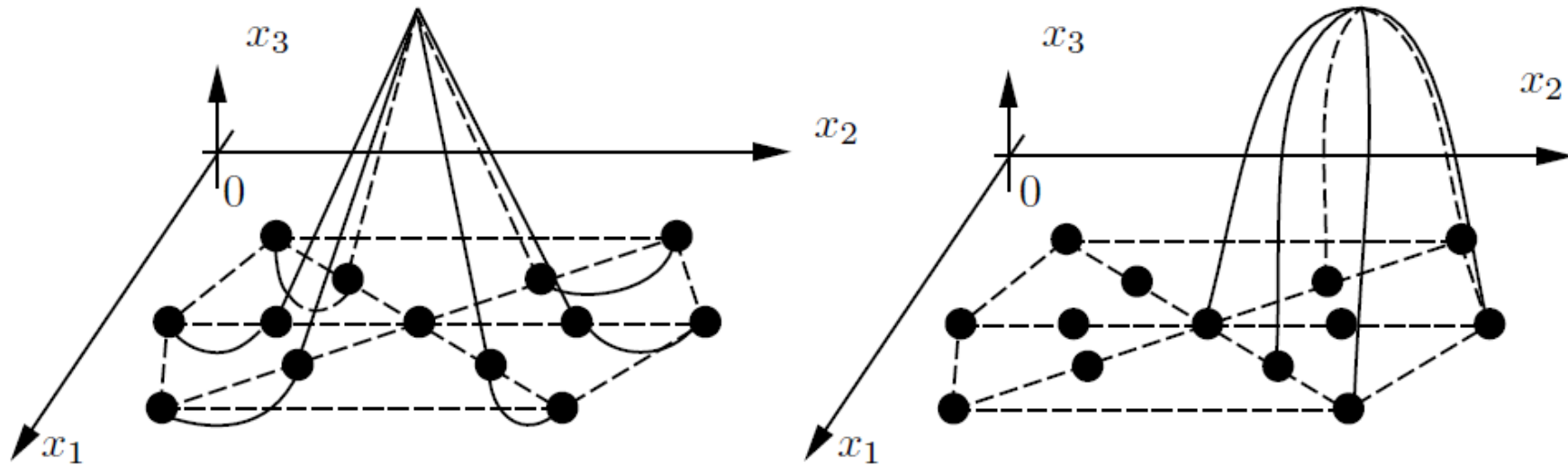
pour  $i, j = 1, \dots, L$  et

$$U_{0,j} = U_{L+1,j} = U_{j,0} = U_{j,L+1} = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, L+1. \quad (11.22)$$

## Problèmes elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$ , éléments finis 2D quadratiques (degré 2)

Le cas  $k = 2$  est illustré dans la figure 11.7. A chaque sommet de triangle et à chaque milieu d'arête est attachée une fonction de base polynomiale de degré 2 sur chaque triangle, nulle en tous les nœuds sauf un, où elle vaut 1.



**Mercredi 8 Octobre:** correction exos 4 et Propé1 de 2024 avec Noémie et Tyler

**Mercredi 15 Octobre:** Cours 5  
Problème parabolique transitoire 1D et 2D  
et éléments finis

**Mercredi 29 Octobre:** Cours 6  
Problème de convection-diffusion

**Mercredi 5 Novembre:** intro Abaqus

**Mercredi 12 Novembre:** propé1